<u>Vergleichsprinzip:</u>

$$\liminf_{\Omega \ni x \to \partial\Omega} (f(x)-g(x)) \leq f(y)-g(y) \leq \liminf_{\Omega \ni x \to \partial\Omega} (f(x)-g(x))$$

für alle $y \in \Omega$.

Hierbei bedeutet $\Omega \ni x \to \partial\Omega$, daß man sich dem Rand von Ω beliebig annähert.

$\blacksquare$

Der vorstehende Satz 5.1 zeigt, daß sich das aus der Theorie der linearen elliptischen Gleichungen 2^{ter} Ordnung bekannte Maximumprinzip durchaus auf Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ausdehnen läßt. Die nachfolgende Überlegung macht deutlich, daß man im nichtlinearen Fall oft viel stärkere Aussagen machen kann:

Ist $\Omega = B_R - \overline{B}_r$ ein Kreisring, so lassen sich auf ∂B_R, ∂B_r beliebige stetige Funktionen $\phi: \partial B_R \to \mathbb{R}$, $\varphi: \partial B_r \to \mathbb{R}$ vorschreiben, zu denen man eine Lösung $u: \Omega \to \mathbb{R}$ des linearen Dirichlet Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ u|_{\partial B_R} = \phi, \quad u|_{\partial B_r} = \varphi \end{cases}$$

konstruieren kann. Bei Minimalflächen ist das völlig anders: läßt sich die Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der äußeren Sphäre ∂B_R durch ein Katenoid kontrollieren, so gilt diese Abschätzung bereits auf dem ganzen Kreisring, m. a. W: die Randwerte auf ∂B_r können insbesondere nicht mehr beliebig sein! Die genaue Formulierung findet man in Satz 5.2. Zur Vorbereitung reden wir kurz über

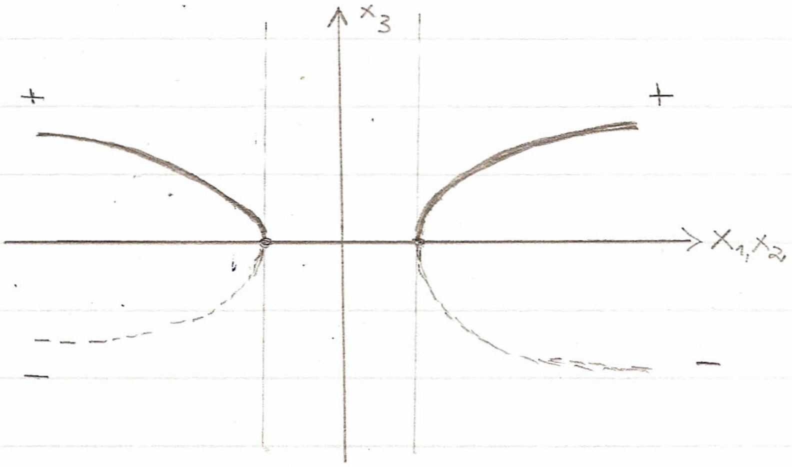
Das Katenoid: wird analytisch beschrieben durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 = (\cosh x_3)^2$$

bzw. in Graphenform

$$x_3 = \pm \operatorname{ar}\cosh \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{auf} \quad \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}.$$

Wählt man das Vorzeichen $+$, so heißt der Graph von $x_3 = \operatorname{ar}\cosh\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ oberes Halbkatenoid, sonst unteres Halbkatenoid.



Sei für $r > 0$, $a \in \mathbb{R}$

$$K^+_{r,a} := \text{Graph von} \quad \underbrace{r \cdot \operatorname{ar}\cosh\left(\frac{1}{r}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) + a}_{=:\, k^+_{r,a}(x_1,x_2)}$$

und entsprechend

$$K^-_{r,a} := \text{Graph von} \quad \underbrace{-r \cdot \operatorname{ar}\cosh\left(\frac{1}{r}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) + a}_{=:\, k^-_{r,a}(x_1,x_2)}$$

mit Definitionsbereich $x_1^2 + x_2^2 \geq r^2$. $K^{\pm}_{r,a}$ gehen durch Ähnlichkeitstransformationen aus dem oberen bzw. unteren Halbkatenoid hervor, die Konstante a bewirkt z.B. eine vertikale Verschiebung, und $k^{\pm}_{r,a}$ lösen auf ihrem Definitionsbereich die nicht parametrische Minimalflächengleichung.

<u>SATZ 5.2:</u> Seien $r_1 < r_2$ gegeben und D ein Gebiet im Kreisring $B_{r_2} - \overline{B}_{r_1}$, z.B. der Kreisring selbst. Sei f eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf D.

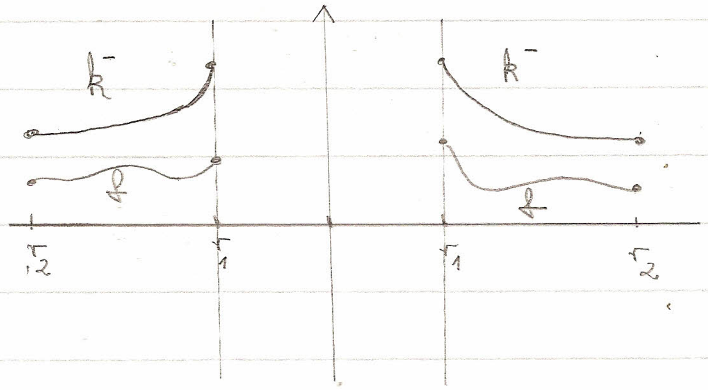
Gilt dann für ein $a \in \mathbb{R}$

$$\limsup \{ f(x) - k^{-}_{r_1,a}(x) \} \leq 0$$

für jede Folge $x \in D$, die gegen einen Randpunkt $x_0 \in \partial D$, $|x_0| > r_1$, konvergiert, so ist

$$f(z) \leq k^{-}_{r_1,a}(z) \quad \text{auf } D.$$

<u>BEMERKUNG:</u> Der Spezialfall $D = B_{r_2} - \overline{B}_{r_1}$ verdient besondere Beachtung.



Weiß man

$$f \leq k^{-}$$

auf dem Rand der <u>äußeren</u> Kreisscheibe, so gilt $f \leq k^-$ auf dem ganzen Ring.

Daraus bekommt man den

<u>Einschließungssatz für Minimalflächen:</u> Ist $f : B_{r_2} - \overline{B_{r_1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung und bezeichnen $k^{\pm}$ auf $\mathbb{R}^2 - B_{r_1}$ definierte obere bzw. untere Halbkatenoide mit

$$k^+ \leq f \leq k^- \quad \text{auf } \partial B_{r_2},$$

so hat man $k^+ \leq f \leq k^-$ auf $B_{r_2} - \overline{B_{r_1}}$.

Beweis von Satz 5.2: Ohne Einschränkung sei $r_1 = 1$, $a = 0$ und $D = B_{r_2} - \overline{B_1}$. Für $1 < r < r_2$ sei

$$\varepsilon := \sup_{r \leq |x| \leq r_2} | k^-(x) - k^-_r(x) |,$$

$k^-(x) := k^-_{1,0}(x)$, $k^-_r(x) := k^-_{r,0}(x)$ in unserer früheren Notation. Ferner nehmen wir an, daß f auf $\overline{D}$ stetig ist und

$$f \leq k^- \quad \text{auf } \partial B_{r_2}$$

erfüllt.

<u>Fall 1:</u> f ist stetig differenzierbar auf $\overline{D}$.
Dann können wir direkt argumentieren und brauchen das Hilfskatenoid nicht einzuführen. Gilt sogar $f \leq k^-$ auf ∂B_1,

so ist die globale Aussage direkte Folge aus dem Maximum-Prinzip Satz 5.1.

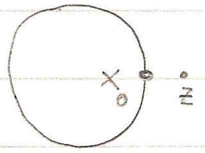
Ist $f > k^-$ irgendwo auf ∂B_1, so wählt man $x_0 \in \partial B_1$ mit

$$(0<)\ f(x_0) - k^-(x_0) =: M := \max_{\partial B_1} (f - k^-),$$

und Satz 5.1 impliziert

$$f(x) - k^-(x) \leq M$$

auf dem ganzen Ring D.



Für z mit $|z| > 1$ ist

$$\nabla k^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{|z|^2 - 1}}\, z,$$

also gilt für

$$\Phi(t) := f(t x_0) - k^-(t x_0), \quad t > 1,$$

(beachte: $t \cdot x_0 \in D$ für $t > 1$, $t < r_2$)

offenbar

$$\Phi'(t) = x_0 \cdot \nabla f(t x_0) + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} > 0,$$

denn ∇f ist nach Voraussetzung ja beschränkt. Mithin ist Φ streng wachsend,

$$\Phi(t) > M \quad \text{für} \quad t > 1,$$

was aber $f(x) - k^-(x) \leq M$ auf D widerspricht.

<u>Fall 2:</u> f ist nicht notwendig C^1 auf $\overline{D}$

Dann gilt

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial B_{r_2}.$$

Sei $D_r := B_{r_2} - \overline{B}_r$. Im Fall

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial B_r,$$

liefert Satz 5.1

$$* \quad f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } D_r.$$

Im anderen Fall existiert $x_0 \in \partial B_r$ mit

$$m := f(x_0) - k_r^-(x_0) = \max_{\partial B_r} f - k_r^- > \varepsilon$$

Satz 5.1 ergibt

$$** \quad f - k_r^- \leq m \quad \text{auf } D_r.$$

Gemäß $r > 1$ ist $\nabla f(x_0)$ beschränkt (x_0 ist innerer Punkt von D), durch Betrachten des Gradienten von k_r^- sieht man wie vorhin

$$f(x) - k_r^-(x) > f(x_0) - k_r^-(x_0)$$

für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0 in D_r, was $**$ widerspricht. Die Annahme war falsch, es folgt $*$. Läßt man r von oben gegen 1 gehen, so folgt aus $*$ sofort $f \leq k^-$ auf D, denn die Katenoide konvergieren gleichmäßig gegeneinander. Die allgemeine Aussage von Satz 5.2 folgt durch ähnliche Betrachtungen. $\blacksquare$